

LE COCYCLE DU VERGER

ROLAND BACHER

ABSTRACT. We define and prove uniqueness of a natural homomorphism (called the Orchard morphism) from some groups associated naturally to a finite set E to the group $\mathcal{E}(E)$ of two-partitions of E representing equivalence relations having at most two classes on E .

As an application, given a finite generic configuration $\mathcal{C} \subset \mathbf{R}^d$, we exhibit a natural partition of \mathcal{C} in two sets.

Le but de cette note est de montrer l'existence et l'unicité d'un homomorphisme naturel non-trivial entre certains groupes associés à un ensemble fini.

Cet homomorphisme fournit une partition naturelle en deux sous-ensembles sur l'ensemble $\mathcal{C} \subset \mathbf{R}^d$ des points d'une configuration finie générique.

Soit E un ensemble fini. Notons $E^{(l)}$ l'ensemble des suites de longueur l sans répétitions et $\mathcal{F}_+(E^{(l)})$ l'ensemble des fonctions de $E^{(l)}$ dans $\{\pm 1\}$ qui sont symétriques, c'est-à-dire indépendantes de l'ordre des arguments. Notons Δ_E le complexe simplicial fini associé au simplexe de sommets E . En utilisant l'isomorphisme entre le groupe additif $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et le groupe multiplicatif $\{\pm 1\}$, le groupe multiplicatif $\mathcal{F}_+(E^{(l)})$ s'identifie au groupe C^{l-1} des $(l-1)$ -cochaînes simpliciales de Δ_E à valeurs dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. L'homomorphisme cobord $\partial : C^{l-1} \longrightarrow C^l$ de $\mathcal{F}_+(E^{(l)})$ dans $\mathcal{F}_+(E^{(l+1)})$ est donnée par

$$\partial\varphi(x_0, \dots, x_l) = \prod_{j=0}^l \varphi(x_0, \dots, x_{j-1}, \hat{x}_j, x_{j+1}, \dots, x_l)$$

et on a évidemment les inclusion

$$B^k = \text{Im}\{\partial : C^{k-1} \rightarrow C^k\} \subset Z^k = \text{Ker}\{\partial : C^k \rightarrow C^{k+1}\} \subset C^k = \mathcal{F}_+(E^{(k+1)})$$

du groupe B^k des k -cobords dans le groupe Z^k des k -cocycles et du groupe Z^k dans le groupe $C^k = \mathcal{F}(E^{(k+1)})$ des k -cochaînes.

Comme Δ_E est homotope à un point, les groupes de cohomologie $H^i = Z^i/B^i$ sont triviaux pour $i \geq 1$ et $H^0 = \{\pm 1\}$ (cf. [3] ou [4]). Le sous-groupe $Z^1 \subset \mathcal{F}_+(E^{(2)})$ des 1-cocycles coïncide donc avec le groupe B^1 des 1-cobords et s'identifie au groupe multiplicatif $\mathcal{E}(E) = C^0/Z^0$ dont les éléments sont des paires de fonctions $\{\pm \alpha\}$ de E dans $\{\pm 1\}$. Une telle paire de fonctions $\pm \alpha$ définit une partition $\alpha^{-1}(1) \cup \alpha^{-1}(-1)$ de E en au plus deux sous-ensembles non-vides et correspond au 1-cobord $\sigma(x, y) = \partial\alpha(x, y) = \alpha(x)\alpha(y)$ pour $x \neq y \in E$.

Réciproquement, une cochaîne $\sigma \in C^1 = \mathcal{F}_+(E^{(2)})$ est un 1-cocycle et donc un 1-cobord si $\partial\sigma(a, b, c) = \sigma(a, b)\sigma(a, c)\sigma(b, c) = 1$ pour tout

⁰Keywords: Group, Configuration of points, Two-partition, Semi-orientation, Orchard morphism. AMS-Classification: 05C25, 52C35

$(a, b, c) \in E^{(3)}$. On construit alors $\alpha \in \partial^{-1}(\sigma) \subset C^0 = \mathcal{F}_+(E^{(1)})$ en choisissant un point base $x_0 \in E$ et en posant $\alpha(x_0) = 1$ et $\alpha(x) = \sigma(x, x_0)$ pour $x \neq x_0$. (L'existence de la cochaîne $\alpha \in \partial^{-1}\sigma$ peut également se déduire des propriétés du graphe fini Γ de sommets E et d'arêtes $\{x, y\}$ pour $\sigma(x, y) = 1$. L'identité $\sigma(a, b) \sigma(a, c) \sigma(b, c) = 1$ pour tout $(a, b, c) \in E^{(3)}$ montre que Γ possède au plus deux composantes connexes Γ_+ et Γ_- qui sont des graphes complets. Quitte à permuter Γ_+ et Γ_- on peut supposer $x_0 \in \Gamma_+$ et on définit $\alpha(x) = 1$ si $x \in \Gamma_+$ et $\alpha(x) = -1$ sinon.) J'appellerai $\mathcal{E}(E) = \{\pm 1\}^E / \pm 1$ le groupe des 2-*partitions* de E . Ses éléments sont en bijection avec les relations d'équivalence sur E ayant au plus 2 classes.

Introduisons maintenant le groupe multiplicatif

$$\mathcal{F}_\pm(E^{(l)}) = \mathcal{F}_+(E^{(l)}) \cup \mathcal{F}_-(E^{(l)})$$

des fonctions de $E^{(l)}$ dans $\{\pm 1\}$ qui sont soit symétriques soit antisymétriques. Une telle fonction $\varphi \in \mathcal{F}_\epsilon(E^{(l)})$ (avec $\epsilon = +$ ou $\epsilon = -$) vérifie l'égalité

$$\varphi(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_l) = \epsilon \varphi(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_l)$$

pour tout $1 \leq i < l$.

Munissons l'ensemble fini E d'un ordre total. Pour un sous-ensemble $F \subset E$, désignons par $\binom{F}{k}$ l'ensemble des suites strictement croissantes de longueur k dans F . Notons $\sharp(E)$ le nombre d'éléments de E et posons pour $\varphi \in \mathcal{F}_\pm(E^{(l)})$ et $y \neq z \in E$

$$\sigma_\varphi(y, z) = \epsilon^{\binom{\sharp(E)-3}{l-2}} \prod_{(x_1, \dots, x_{l-1}) \in \binom{E \setminus \{y, z\}}{l-1}} \varphi(x_1, \dots, x_{l-1}, y) \varphi(x_1, \dots, x_{l-1}, z)$$

où $\epsilon = 1$ si $\varphi \in \mathcal{F}_+(E^{(l)})$ et $\epsilon = -1$ si $\varphi \in \mathcal{F}_-(E^{(l)})$.

Proposition 0.1. (i) La fonction $\sigma_\varphi : E^{(2)} \longrightarrow \{\pm 1\}$ est symétrique et ne dépend pas du choix de l'ordre sur E .

(ii) L'application $\varphi \longmapsto \sigma_\varphi$ définit un homomorphisme $\text{Sym}(E)$ -équivariant du groupe $\mathcal{F}_\pm(E^{(l)})$ dans le sous-groupe $Z^1 \subset \mathcal{F}_+(E^{(2)})$ des 1-cocycles.

Esquisse de la preuve. La symétrie de σ_φ est évidente. Le choix d'un autre ordre de E permute de manière similaire les arguments dans les deux facteurs

$$\varphi(x_1, \dots, x_{l-1}, y) \varphi(x_1, \dots, x_{l-1}, z)$$

et les changements éventuels de signe s'annulent deux-à-deux.

Les détails pour prouver que l'application $\varphi \longmapsto \sigma_\varphi$ est un homomorphisme $\text{Sym}(E)$ -équivariant sont faciles et laissés au lecteur.

Le cocycle σ_φ est fermé si on a $\sigma_\varphi(a, b) \sigma_\varphi(b, c) \sigma_\varphi(a, c) = 1$ pour tout $(a, b, c) \in E^{(3)}$. Si φ est symétrique cette identité est facile et laissée au lecteur. Pour φ antisymétrique, elle résulte de l'égalité

$$\begin{aligned} & \varphi(x_1, \dots, x_{l-2}, c, a) \varphi(x_1, \dots, x_{l-2}, c, b) \\ & \varphi(x_1, \dots, x_{l-2}, a, b) \varphi(x_1, \dots, x_{l-2}, a, c) \\ & \varphi(x_1, \dots, x_{l-2}, b, a) \varphi(x_1, \dots, x_{l-2}, b, c) = -1 \end{aligned}$$

pour $(x_1, \dots, x_{l-2}) \in \binom{E \setminus \{a, b, c\}}{l-2}$. □

On appelle le cocycle σ_φ donné par la Proposition 0.1 le *cocycle du verger*. Le *morphisme du verger* est défini comme l'homomorphisme de

$\mathcal{F}_\pm(E^{(l)})$ dans $\mathcal{E}(E)$ qui associe à la fonction symétrique ou antisymétrique $\varphi \in \mathcal{F}_\pm(E^{(l)})$ la 2-partition $\partial^{-1}(\sigma_\varphi)$ définie par le 1-cocycle σ_φ .

Pour $1 \leq l < \sharp(E)$, on peut montrer que c'est l'unique homomorphisme non-trivial du groupe $\mathcal{F}_\pm(E^{(l)})$ dans le groupe $\mathcal{E}(E)$ qui soit équivariant par rapport à l'action évidente par automorphismes de $\text{Sym}(E)$ sur $\mathcal{F}_\pm(E^{(l)})$ et $\mathcal{E}(E)$.

Pour $l = \sharp(E)$ le morphisme du verger est toujours trivial et il n'existe pas d'autre homomorphisme naturel ($\text{Sym}(E)$ -équivariant) de $\mathcal{F}_\pm(E^{(\sharp(E))})$ dans $\mathcal{E}(E)$ si $\sharp(E) > 2$. Pour $\sharp(E) = 2$, un homomorphisme naturel "exotique" (distinct du morphisme du verger qui est trivial dans ce cas) de $\mathcal{F}_\pm(E^{(\sharp(E))})$ dans $\mathcal{E}(E)$ existe cependant ; c'est l'application qui envoie une fonction antisymétrique (qui est unique, au signe près) de $\mathcal{F}_-(E^{(2)})$ sur l'unique élément non-trivial de $\mathcal{E}(E)$. Cette exception est rendue possible par le fait que le groupe $\text{Sym}(E)$ agit trivialement sur $\mathcal{E}(E)$ si E possède au plus deux éléments.

L'existence de cet homomorphisme n'est pas surprenant sur les fonctions symétriques. Il peut en effet s'obtenir en composant l'un des homomorphismes

$$\begin{aligned} \varphi &\longmapsto \beta_\varphi(y) = \prod_{(x_1, \dots, x_{l-1}) \in \binom{E \setminus \{y\}}{l-1}} \varphi(x_1, \dots, x_{l-1}, y) \\ \varphi &\longmapsto \tilde{\beta}_\varphi(y) = \prod_{(x_1, \dots, x_l) \in \binom{E \setminus \{y\}}{l}} \varphi(x_1, \dots, x_l) \end{aligned}$$

de $\mathcal{F}_+(E^{(l)}) \longrightarrow \mathcal{F}_+(E^{(1)})$ avec l'homomorphisme quotient $\mathcal{F}_+(E^{(1)}) \longrightarrow \mathcal{F}_+(E^{(1)})/\{\pm 1\} = \mathcal{E}(E)$. C'est son extension aux fonctions antisymétriques $\mathcal{F}_-(E^{(l)})$ qui n'est pas évidente à priori et qui constitue le résultat de cette Note.

Citons l'application suivante, à l'origine du nom de cet homomorphisme.

Une *configuration* est un sous-ensemble fini $\mathcal{C} \subset \mathbf{R}^d$ de points dans un espace vectoriel (ou affine) réel muni d'une orientation. Une telle configuration est *générique* si tout sous-ensemble de $k+1 \leq d+1$ points engendre un sous-espace affine de dimension k . Considérons la fonction $\varphi : \mathcal{C}^{(d+1)} \longrightarrow \{\pm 1\}$ définie par $\varphi(x_0, \dots, x_d) = 1$ si la base $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_d - x_{d-1}$ induit l'orientation positive de \mathbf{R}^d et $\varphi(x_0, \dots, x_d) = -1$ sinon. Il est évident que φ est une fonction antisymétrique. On obtient alors une 2-partition sur \mathcal{C} en considérant l'image $\partial^{-1}(\sigma_\varphi)$ de φ par le morphisme du verger.

Ainsi, dans un chapitre apocryphe d'Alice au pays des Merveilles, la Reine de Coeur exige un verger planté de façon rationnelle de pruniers et cerisiers. Elle a imposé les emplacements des arbres futurs selon une configuration générique, semant ainsi un grand désarroi parmi ses jardiniers. Alice les a sauvés provisoirement de la décapitation en utilisant le morphisme du verger qui généralise aux dimensions supérieures les haies plantées de deux essences en alternance.

La figure montre le verger de la Reine, planté par Alice avec $3 + 6 = 9$ arbres (Alice a quand-même eu un moment d'hésitation : ne sachant pas si la Reine préférerait les prunes ou les cerises, elle a joué à pile ou face). Les droites tracées ont été utilisées pour convaincre la Reine (qui n'y a rien compris mais qui, craignant de perdre la face devant ses sujets, n'a pas osé l'avouer) en utilisant les explications données ci-dessous.

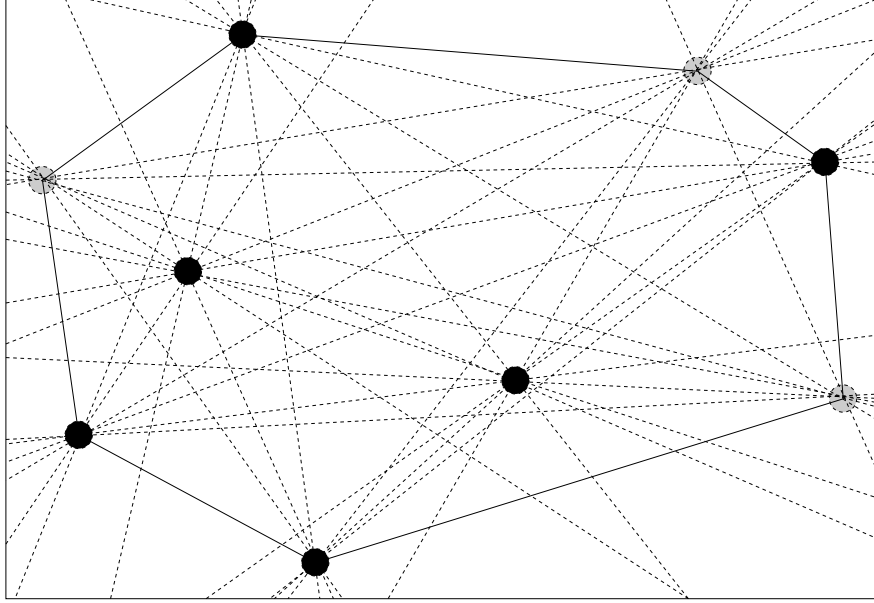


Figure : Le verger de la Reine de Coeur

Pour $\varphi \in \mathcal{F}_-(\mathcal{C}^{d+1})$ provenant d'une configuration générique $\mathcal{C} \subset \mathbf{R}^d$, la relation d'équivalence associée à σ_φ se calcule de la manière suivante: Pour $x \neq y \in \mathcal{C}$, notons $s(x, y)$ le nombre d'hyperplans qui séparent x de y et qui contiennent d points distincts de $\mathcal{C} \setminus \{x, y\}$. Les points x et y appartiennent à la même classe de $\partial^{-1}(\sigma_\varphi)$ si et seulement si $s(x, y) \equiv \binom{\#(\mathcal{C})-3}{d-1} \pmod{2}$.

Citons pour terminer la propriété suivante de l'homomorphisme du verger. On dit que deux fonctions $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_\pm(E^{(l)})$ sont *reliées par un flip* si

$$\varphi(x_1, \dots, x_l) = \psi(x_1, \dots, x_l)$$

sauf pour $\{x_1, \dots, x_l\} = X$ où $X \subset E$ est un sous-ensemble fixé de l éléments dans E . Les 2-partitions $\partial^{-1}(\sigma_\varphi)$ et $\partial^{-1}(\sigma_\psi)$ associées à φ et ψ sont alors identiques en dehors de X et diffèrent sur X (pour un choix convenable des représentants).

Sur une configuration planaire, un flip consiste à faire dégénérer un triangle très obtus formé de trois points convenables de \mathcal{C} en trois points alignés pour arriver à un triangle très obtus ressemblant au triangle miroir relativement à son arête la plus longue. En coloriant les deux classes associées aux 2-partitions avec deux couleurs différentes, on voit ainsi que lors d'un flip, tous les points restent de la même couleur sauf les points du flip qui, sous l'effet de la forte émotion provoquée par l'alignement, changent de couleur.

Remarquons que deux configurations génériques de n points dans \mathbf{R}^2 (ou plus généralement dans \mathbf{R}^d) peuvent toujours être reliées, à isotopie près, par un nombre fini de flips.

Des calculs indiqués dans [2] suggèrent qu'il n'y a généralement pas de restrictions sur les nombres possibles de pruniers dans les configurations planaires génériques à n points : Pour $n = 5, 7, 8, 9$ ce nombre peut prendre toutes les valeurs entre 0 et n . Les cas monochromatiques ou très déséquilibrés sont cependant relativement rares.

J'aimerais remercier toutes les personnes avec qui j'ai eu des discussions sur les vergers, en particulier M. Brion, P. Cameron, N. A'Campo, E. Ferland, E. Ghys, P. de la Harpe et A. Marin.

REFERENCES

- [1] Bacher R, *An Orchard Theorem*, Preprint math/CO0206266.
- [2] Bacher R, Garber D, *Chromatic properties of generic planar configurations of points*, Preprint math/GT0210051.
- [3] Bredon G.E, *Topology and Geometry*, Springer (1993).
- [4] Massey W.S, *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer (1991).

Roland Bacher
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR 5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
e-mail: Roland.Bacher@ujf-grenoble.fr